

引文格式:LI Jiayuan, HU Qingwu, AI Mingyao. A Non-iterative Space Resection Method Based on Barycentric Coordinates[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2015, 44(9): 988-994. (李加元, 胡庆武, 艾明耀. 以重心坐标为基准的空间后方交会非迭代法[J]. 测绘学报, 2015, 44(9): 988-994.) DOI: 10.11947/j. AGCS. 2015. 20140473

## 以重心坐标为基准的空间后方交会非迭代法

李加元, 胡庆武, 艾明耀

武汉大学遥感信息工程学院, 湖北 武汉 430079

## A Non-iterative Space Resection Method Based on Barycentric Coordinates

LI Jiayuan, HU Qingwu, AI Mingyao

School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract:** To resolve the problem that iterative space resection algorithms may have no convergence in oblique photogrammetry, a novel non-iterative method based on barycentric coordinates is proposed. This algorithm firstly describes the object space coordinates of control points as barycentric coordinates, based on its coordinate reference independence, the corresponding image space coordinates can be obtained by using total least square method, then absolute orientation using orthonormal matrices is applied and the result is optimized finally. Experimental results show that this algorithm can be suitable for any image attitude angle, and the accuracy is even better than iterative space resection methods.

**Key words:** space resection; barycentric coordinates; total least square; absolute orientation; oblique photogrammetry

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China (No.41271452)

**摘要:**为解决基于迭代的空間后方交会算法在傾斜摄影中可能出现的不收敛现象,提出了一种以重心坐标为基准的非迭代解算方法。首先将控制点物方空间坐标描述成重心坐标,并基于其坐标参考无关性,采用总体最小二乘方法求出对应像方空间坐标,然后通过正交矩阵方法进行绝对定向并优化。试验结果表明,该方法几乎对任意影像姿态均能正确解算,并且精度达到甚至优于基于迭代的空間后方交会方法。

**关键词:** 空间后方交会; 重心坐标; 总体最小二乘; 绝对定向; 倾斜摄影

**中图分类号:** P231

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-1595(2015)09-0988-07

**基金项目:** 国家自然科学基金(41271452)

### 1 引言

空间后方交会是摄影测量和计算机视觉领域的一个基础性问题,在影像匹配、空三加密、三维重建等诸多领域发挥着至关重要的作用。它是指通过若干物方控制点及其在影像上对应像点坐标反算出相机的位置(外方位线元素)与姿态(外方位角元素)的过程<sup>[1]</sup>。其传统解算方法主要有欧拉角法<sup>[1-2]</sup>、角锥体法<sup>[3]</sup>和直接线性变换法<sup>[4]</sup>。其中,欧拉角法需已知外方位元素良好初值,一般适用于竖直摄影;角锥体法较强依赖于外方位线元素初值;直接线性变换法不适合高精度的测量任务<sup>[5]</sup>。然而,随着倾斜影像的普及,传统方法往往

因无良好外方位元素初值而迭代不收敛。

为了有效地解决初值强依赖问题,学者们提出了许多具有参考价值的解算方法,主要可以分为迭代解法和非迭代解法两类<sup>[6]</sup>。迭代解法具有较高的精度和鲁棒性,但是计算复杂度高且对未知数初值具有一定的依赖性:如文献[7-8]提出的利用单位四元数描述相机旋转矩阵进行迭代求解的方法,文献[9]采用对偶四元数描述坐标系之间的旋转和平移,文献[10-11]以线性解作为初始值进行高斯-牛顿全局优化。与之相反,非迭代解法解算效率高且无须初值,但是精度和鲁棒性较低,比较有代表性的有:文献[12]利用单位四元数分步求解外方位角元素和线元素的方法,文献

[13]通过 4 个非共面虚拟点作为控制点解求摄像机的位置和姿态。这些方法都不同时具备高精度和无须初值这两个特点,并且均不能保证其对于任意影像姿态均能正确解算。

重心坐标是一种参考无关坐标,它只与所选坐标四面体相关,而与坐标四面体所在坐标系无关,现已广泛应用于在工程学和图形学领域,如有限元计算<sup>[14]</sup>、复杂曲面构造<sup>[15]</sup>、多边形面片的参数化等<sup>[16-17]</sup>。基于此性质,本文引入重心坐标来描述控制点物方空间坐标,采用总体最小二乘<sup>[18-20,25]</sup>求出其在像空间坐标系中的坐标,将后方交会问题转换为坐标系绝对定向问题。通过与 3 种迭代算法的对比,验证了本文方法具有高精度,高效率,无须初值,适应于任意影像姿态等特点。

### 2 重心坐标概念和性质

在数学中,三维重心坐标是由四面体顶点定义的坐标。如图 1 所示,三维欧氏空间  $R^3$  中任取一个四面体  $P_1P_2P_3P_4$  作为坐标四面体,对  $R^3$  任意一点  $M(X_M, Y_M, Z_M)^T$ ,下列 4 个四面体的有向(点  $M$  在四面体  $P_1P_2P_3P_4$  内部时为正)体积的比值  $V_{MP_2P_3P_4} : V_{P_1MP_3P_4} : V_{P_1P_2MP_4} : V_{P_1P_2P_3M} = u_1 : u_2 : u_3 : u_4$  称为点  $M$  关于坐标四面体  $P_1P_2P_3P_4$  的重心坐标<sup>[21]</sup>,若令  $\lambda_i = u_i / \sum_{i=1}^4 u_i$ ,则  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ ,称  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  为点  $M$  的规范重心坐标<sup>[22]</sup>。

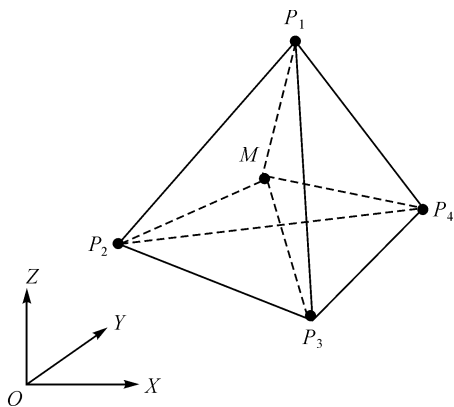


图 1 三维重心坐标

Fig.1 Barycentric coordinates in 3D Euclidean space

根据重心坐标的定义,点  $M(X_M, Y_M, Z_M)^T$  与坐标四面体 4 个顶点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的欧氏空间坐标  $(X_{P_i}, Y_{P_i}, Z_{P_i})^T (i = 1, 2, 3, 4)$  存在以下关系<sup>[21]</sup>

$$\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} X_{P_1} \\ Y_{P_1} \\ Z_{P_1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} X_{P_2} \\ Y_{P_2} \\ Z_{P_2} \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} X_{P_3} \\ Y_{P_3} \\ Z_{P_3} \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} X_{P_4} \\ Y_{P_4} \\ Z_{P_4} \end{bmatrix} \quad (1)$$

当选取  $M$  所在直角坐标系原点  $O(0, 0, 0)^T$  为  $P_4$ ,以及  $X, Y, Z$  轴上单位长度点  $\bar{X}(1, 0, 0)^T, \bar{Y}(0, 1, 0)^T, \bar{Z}(0, 0, 1)^T$  分别为  $P_1, P_2, P_3$  时,由式(1)可得点  $M$  的规范重心坐标为  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (X_M, Y_M, Z_M, 1 - X_M - Y_M - Z_M)$  (2)

从以上定义和性质可知,规范重心坐标只与所选坐标四面体相关,而与坐标四面体所在参考坐标系无关。因此,在空间后方交会中,控制点在物方空间坐标系与像空间坐标系中拥有相同的规范重心坐标。

### 3 基于重心坐标的空间后方交会

本文方法分为下面 3 个步骤:坐标四面体顶点的像空间坐标解算;坐标系绝对定向分解外方位元素;外方位元素值优化。为了方便表述,物方空间坐标和像方空间坐标分别用下标  $W$  和  $C$  表示。

#### 3.1 坐标四面体顶点像空间坐标解算

如图 2 所示,传统空间后方交会将摄影中心  $S$ 、像点  $a_i$  及其对应控制点  $A_i$  统一纳入到像空间辅助坐标系  $S-XYZ$ ,利用其与物方空间坐标系  $O-X_W Y_W Z_W$  坐标轴平行,坐标原点不同这一关系,推导出共线条件方程来求解 6 个外方位元素,具体推导过程见文献[1]。与文献[1]不同,本文将  $S, a_i$  和  $A_i$  三点共线条件应用于像空间坐标系  $S-X_C Y_C Z_C$ ,利用控制点的规范重心坐标,解求坐标四面体顶点的像空间坐标  $P_{C_i} (X_{P_{C_i}}, Y_{P_{C_i}}, Z_{P_{C_i}})^T (i = 1, 2, 3, 4)$ 。

首先,选取原点  $O(0, 0, 0)^T$  及  $X_W, Y_W, Z_W$  轴上单位长度点  $\bar{X}_W(1, 0, 0)^T, \bar{Y}_W(0, 1, 0)^T, \bar{Z}_W(0, 0, 1)^T$  分别为  $P_4, P_1, P_2, P_3$  构成坐标四面体  $P_1P_2P_3P_4$ ,则由公式(2)可以求出  $A_i$  的规范重心坐标  $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4}) (i = 1, 2, \dots, n)$ ,根据其参考坐标系无关性,  $A_i$  对应的像空间坐标  $A_{C_i} (X_{C_i}, Y_{C_i}, Z_{C_i})^T (i = 1, 2, \dots, n)$  可以表示为

$$\begin{bmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \\ Z_{C_i} \end{bmatrix} = \lambda_{i1} \begin{bmatrix} X_{P_{C_1}} \\ Y_{P_{C_1}} \\ Z_{P_{C_1}} \end{bmatrix} + \lambda_{i2} \begin{bmatrix} X_{P_{C_2}} \\ Y_{P_{C_2}} \\ Z_{P_{C_2}} \end{bmatrix} +$$

$$\lambda_{i3} \begin{bmatrix} X_{P_{C3}} \\ Y_{P_{C3}} \\ Z_{P_{C3}} \end{bmatrix} + \lambda_{i4} \begin{bmatrix} X_{P_{C4}} \\ Y_{P_{C4}} \\ Z_{P_{C4}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

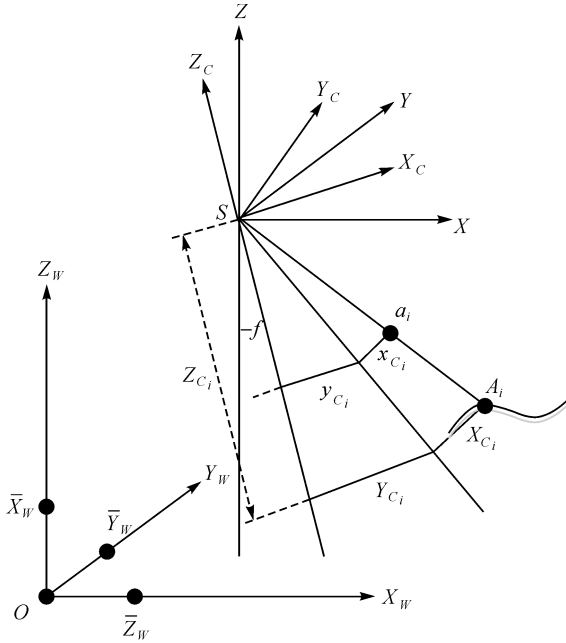


图2 共线方程

Fig.2 Collinear equation

设  $a_i$  的像平面坐标为  $(x_{C_i}, y_{C_i}) (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则其像空间坐标为  $(x_{C_i}, y_{C_i}, -f), i = 1, 2, \dots, n$ , 利用图 2 所示像方空间三点共线关系有

$$\frac{X_{C_i}}{x_{C_i}} = \frac{Y_{C_i}}{y_{C_i}} = \frac{Z_{C_i}}{-f} = \omega_i \quad (4)$$

写成矩阵形式并顾及式(3), 则有

$$\omega_i \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \\ Z_{C_i} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \lambda_{ij} \begin{bmatrix} X_{P_{C_j}} \\ Y_{P_{C_j}} \\ Z_{P_{C_j}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\omega_i$  是尺度因子;  $f$  是焦距。为消除尺度因子  $\omega_i$ , 在式(5)两边同时乘以向量  $(x_{C_i}, y_{C_i}, -f)$  的反对称矩阵  $\mathbf{S}_w$

$$\mathbf{S}_w = \begin{bmatrix} 0 & f & y_{C_i} \\ -f & 0 & -x_{C_i} \\ -y_{C_i} & x_{C_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

得到 3 个线性方程。然而由于矩阵  $\mathbf{S}_w$  的秩为 2 (文献[23]), 仅有两个方程是线性独立的<sup>[24]</sup>, 故取其前两个方程构成方程组式(7)

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda_{i1} Y_{P_{C1}} + \lambda_{i2} Y_{P_{C2}} + \lambda_{i3} Y_{P_{C3}} + \lambda_{i4} Y_{P_{C4}}) + \\ y_{C_i} (\lambda_{i1} Z_{P_{C1}} + \lambda_{i2} Z_{P_{C2}} + \lambda_{i3} Z_{P_{C3}} + \lambda_{i4} Z_{P_{C4}}) = 0 \\ f(\lambda_{i1} X_{P_{C1}} + \lambda_{i2} X_{P_{C2}} + \lambda_{i3} X_{P_{C3}} + \lambda_{i4} X_{P_{C4}}) + \\ x_{C_i} (\lambda_{i1} Z_{P_{C1}} + \lambda_{i2} Z_{P_{C2}} + \lambda_{i3} Z_{P_{C3}} + \lambda_{i4} Z_{P_{C4}}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, 未知数  $\mathbf{P}_{C_i} (X_{P_{C_i}}, Y_{P_{C_i}}, Z_{P_{C_i}})^T (i = 1, 2, 3, 4)$  个数为 12, 当控制点个数  $n \geq 6$ , 可以组成齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ , 其中  $\mathbf{A}$  是系数矩阵,  $\mathbf{X}$  是未知数。考虑到系数矩阵可能包含有误差, 采用文献[25]中所用总体最小二乘(TLS)方法进行求解, 目的是从  $m$  个线性方程组中求解  $n$  个未知数的总体最小二乘估值 ( $m \geq n$ ), 具体计算步骤描述如下。

(1) 将线性方程组写成  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  矩阵, 其中  $\mathbf{A}$  为未知数系数,  $\mathbf{X}$  为未知数,  $\mathbf{b}$  为常数项。

(2) 构成增广矩阵  $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ , 进行奇异值分解  $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  为酉矩阵,  $\mathbf{\Sigma}$  为奇异值矩阵。

(3) 由  $\mathbf{V}$  最后一列求得未知数的 TLS 解为

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\text{TLS}} = \frac{-1}{v_{m+1, m+1}} (v_{1, m+1}, v_{2, m+1}, \dots, v_{m, m+1}) \quad (8)$$

式中,  $v_{i, m+1} (i = 1, 2, \dots, m+1)$  为  $\mathbf{V}$  的最后一列。

### 3.2 坐标系绝对定向分解 6 个外方位元素

求得  $\mathbf{P}_{C_i} (i = 1, 2, 3, 4)$  的坐标值后, 利用式(3)便可计算控制点的像空间坐标  $\mathbf{A}_{C_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 。至此, 控制点在像空间坐标系和物方空间坐标系中的三维坐标都已知, 空间后方交会问题便转化为摄影测量中的 7 参数绝对定向(即两空间三维坐标系的相似变换)问题, 因而有

$$\mathbf{A}_{w_i} = \mu \mathbf{R} \mathbf{A}_{C_i} + \Delta \mathbf{T} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

式中,  $\mu$  是坐标系比例尺缩放系数;  $\mathbf{R}$  是像空间坐标系到物方空间坐标系的 3 阶旋转矩阵;  $\Delta \mathbf{T}$  为坐标原点的 3 维平移列向量。目前, 绝对定向问题已有许多比较成熟的解法, 如文献[26]采用单位四元数描述旋转矩阵的线性解法, 文献[27]利用正交矩阵的闭合解求法等, 本文选用文献[27]的正交矩阵方法进行求解。下面简单描述其基本解算步骤。

步骤 1: 计算控制点的像空间和物方空间重心化距离  $d_{C_i}$  和  $d_{w_i}$ , 并求解两组对应距离的比例系数  $\mu$  的最小二乘解。利用  $\mu$  将两坐标系统一到相同尺度, 重心化公式为

$$\mathbf{A}_{g_i} = \mathbf{A}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{A}_k}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{A}_i$  表示空间坐标;  $\mathbf{A}_{g_i}$  表示重心化后的空间坐标。

步骤 2: 对统一尺度的控制点像空间坐标  $\mathbf{A}'_{C_i}$  和物方空间坐标  $\mathbf{A}_{W_i}$  通过式(11)构成矩阵  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{A}_{W_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{A}_{W_i}}{n} \right)^T \left( \mathbf{A}'_{C_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{A}'_{C_i}}{n} \right) \quad i=1,2,\dots,n \quad (11)$$

步骤 3: 对矩阵  $\mathbf{M}$  进行 SVD 分解,  $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \mathbf{M}$ , 获得旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和摄站中心  $\mathbf{S}$  的解为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U}\mathbf{V}^T \\ \mathbf{S}^T &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{A}_{W_i}}{n} \right)^T - \mathbf{R} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{A}'_{C_i}}{n} \right)^T \end{aligned} \right\} \quad i=1,2,\dots,n \quad (12)$$

### 3.3 外方位元素值优化

为提高算法精度, 首先把旋转矩阵  $\mathbf{R}$  作为已知值, 利用文献[25]的算法求出摄站中心  $\mathbf{S}$  的总体最小二乘解  $\mathbf{S}_{\text{TLS}}$ , 再把摄站中心  $\mathbf{S}_{\text{TLS}}$  作为已知值, 反求出旋转矩阵的总体最小二乘解  $\mathbf{R}_{\text{TLS}}$ , 最后比较 3 组解  $(\mathbf{R}, \mathbf{S}), (\mathbf{R}, \mathbf{S}_{\text{TLS}}), (\mathbf{R}_{\text{TLS}}, \mathbf{S}_{\text{TLS}})$  的像点残差中误差<sup>[28]</sup>, 选取中误差最小的解作为最终解。

## 4 试验结果与分析

分别采用模拟和真实数据来评价本文算法的精度、稳定性以及速度, 并与欧拉角 LS 法、欧拉角 TLS 解法、单位四元数法进行对比。

### 4.1 模拟数据试验

首先采用 6 张模拟像片数据验证本文算法的正确性和可行性。其次, 固定摄站中心坐标  $\mathbf{S}$ , 通过随机函数产生三维相机姿态列向量, 构成旋转矩阵。然后分别对上述两组控制点由共线条件方程算出其对应像点坐标, 并加入  $[-0.01 \text{ mm}, 0.01 \text{ mm}]$  (大约  $\pm 2$  像素) 范围内的随机误差, 再由控制点及其像点坐标出发, 分别采用上述方法解算出外方计算值, 将计算值与真值进行比较来判断此次解算正确与否。重复执行上述过程 1000 次, 通过错误解算的次数多少来说明该算法对相机不同姿态的适用性, 同时统计 1000 次解算的总时间来比较算法的效率, 并利用所有正确解算的平均中误差来评价各个算法的精度。

#### 4.1.1 正确性及精度

试验数据来自文献[7], 相机内方位元素为  $(x_0, y_0, f) = (0, 0, 100 \text{ mm})$ , 外方位元素  $(X_S,$

$Y_S, Z_S, \varphi, \omega, \kappa)$  的设计值及数据信息见表 1。由于影像数据无先验的位置和姿态信息, 因此欧拉角 LS 法、欧拉角 TLS 法和单位四元数法在解算时所必需的姿态初始值取像片处于水平时的姿态, 位置初值取 0, 解算结果见表 2。

表 1 外方位元素设计值

Tab.1 The design value of exterior orientation elements

影像	说明	$X_S/\text{m}$	$Y_S/\text{m}$	$Z_S/\text{m}$	$\varphi$	$\omega$	$\kappa$
1	小倾角 大航高	16 200	16 200	20 250	$-100'$	$70'$	$20'$
2	大倾角 大航高	16 200	16 200	20 250	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
3	特大倾角 大航高	-16 200	-16 200	20 250	$80^\circ$	$80^\circ$	$40^\circ$
4	小倾角 小航高	1620	1620	2250	$-100'$	$70'$	$20'$
5	大倾角 小航高	1620	1620	2250	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
6	特大倾角 小航高	-1620	-1620	2250	$80^\circ$	$80^\circ$	$40^\circ$

对于该模拟试验, 衡量精度的标准采用真误差<sup>[28]</sup>, 即计算值减去设计值的绝对值。其中, 除欧拉角法(包含 LS 和 TLS 解法)因有 4 张像片迭代不收敛只有 2 组数据参与统计外, 其他方法均求出 6 张像片外方位元素的真误差, 并以其平均值作为该算法的最终误差, 具体数值在表 3 中给出。

分析表 2 可以发现, 对于近似竖直摄影(小倾角)影像, 4 种方法均能正确解算外方位元素, 但当倾角大于某个值后, 在没有任何先验信息的情况下, 欧拉角法(LS 和 TLS 解法)迭代计算无法收敛, 解算失败, 而其他方法则能得到正确结果。同时, 欧拉角法(LS 和 TLS 解法)迭代次数最多, 单位四元数法相对较少, 而本文方法则无须迭代计算。再看表 3, 欧拉角 TLS 解法由于考虑了观测值误差, 因而整体精度最高, 而本文方法在精度上也基本达到甚至优于其他两种基于迭代的算法。

#### 4.1.2 适用性和效率

选取文献[7]中的 2 组控制点数据(每组 9 个), 对上述 3 种方法分别进行了 1000 次试验。其中, 第 1 组数据的摄站点坐标设计值固定为  $S_1(16 200, 16 200, 20 250)$ , 第 2 组数据的摄站点坐标设计值为  $S_2(1620, 1620, 2250)$ , 相机姿态由函数随机产生, 试验结果见表 4。

表 2 模拟数据解算结果  
Tab.2 Results for simulation data

影像	方法	$X_S/m$	$Y_S/m$	$Z_S/m$	$\varphi$	$\omega$	$\kappa$	迭代次数
1	本文方法	16 199.999 929	16 199.999 935	20 249.999 975	-100'	70'	20'	1
	欧拉角	16 199.999 955	16 199.999 900	20 250.000 005	-100'	70'	20'	7
	欧拉角 TLS	16 199.999 981	16 199.999 942	20 249.999 997	-100'	70'	20'	7
	单位四元数	16 199.999 955	16 199.999 900	20 250.000 005	-100'	70'	20'	4
2	本文方法	16 199.999 986	16 200.000 027	20 249.999 952	20°	30°	40°	1
	欧拉角	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	欧拉角 TLS	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	单位四元数	16 199.999 987	16 200.000 027	20 249.999 950	20°	30°	40°	7
3	本文方法	-16 199.999 963	-16 200.000 015	20 250.000 042	80°	80°	40°	1
	欧拉角	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	欧拉角 TLS	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	单位四元数	-16 199.999 958	-16 200.000 022	20 250.000 042	80°	80°	40°	25
4	本文方法	1 619.999 999	1 620.000 002	2 250.000 000	-100'	70'	20'	1
	欧拉角	1 620.000 009	1 619.999 993	2 250.000 000	-100'	70'	20'	8
	欧拉角 TLS	1 619.999 999	1 620.000 000	2 250.000 000	-100'	70'	20'	8
	单位四元数	1 620.000 009	1 619.999 993	2 250.000 000	-100'	70'	20'	4
5	本文方法	1 620.000 010	1 620.000 004	2 250.000 001	20°	30°	40°	1
	欧拉角	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	欧拉角 TLS	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	单位四元数	1 619.999 983	1 620.000 012	2 249.999 997	20°	30°	40°	6
6	本文方法	-1 620.000 014	-1 619.999 983	2 249.999 954	80°	80°	40°	1
	欧拉角	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	欧拉角 TLS	迭代不收敛	—	—	—	—	—	—
	单位四元数	-1 620.000 038	-1 620.000 027	2 249.999 957	80°	80°	40°	29

注:因为本文算法为非迭代解法,故迭代次数由 1 来表示。

表 3 各算法未知数真误差比较  
Tab.3 Comparison of the true error of unknown parameters

方法	$\Delta X_S/m$	$\Delta Y_S/m$	$\Delta Z_S/m$	$\Delta\varphi/(^\circ)$	$\Delta\omega/(^\circ)$	$\Delta\kappa/(^\circ)$	参与统计张数
本文方法	0.000 025	0.000 024	0.000 027	0	0	0	6
欧拉角	0.000 027	0.000 054	0.000 003	0	0	0	2
欧拉角 TLS	0.000 010	0.000 027	0.000 002	0	0	0	2
单位四元数	0.000 027	0.000 033	0.000 027	0	0	0	6

注: $\Delta X_S, \Delta Y_S, \Delta Z_S, \Delta\varphi, \Delta\omega, \Delta\kappa$  分别表示 6 个外方位元素的真误差平均值。

表 4 解算结果比较

Tab.4 Comparing the result of each algorithm

方法	第 1 组			第 2 组		
	$T_{error}$	$m_0$ /mm	时间 /s	$T_{error}$	$m_0$ /mm	时间 /s
本文算法	0	0.008 35	0.580	3	0.009 21	0.567
欧拉角	745	0.008 21	16.265	666	0.009 26	16.073
欧拉角 TLS	733	0.007 57	15.653	689	0.008 86	15.605
单位四元数	231	0.008 27	15.989	226	0.009 59	15.204

注: $T_{error}$  为 1000 次试验中错误解算次数; $m_0$  为像点残差中误差。

试验中采用摄站点坐标的相对误差  $\epsilon$  来评判某方法该次解算正确与否,  $\epsilon$  由式(13)给出

$$\epsilon = \frac{\|S - S'\|}{\|S\|} \quad (13)$$

式中,  $S$  为相机摄站中心坐标真值;  $S'$  表示某方法的摄站中心坐标解算值;  $\| \cdot \|$  表示二维范数, 即欧氏距离。对于该试验的两组数据, 当相对误差  $\epsilon \leq 5 \times 10^{-5}$  时(对应于这两组数据的摄站中心位置绝对误差分别为 1.528 9 m 和 0.160 6 m), 外方位元素解算正确, 否则错误。此外, 试验中所有算法程序及其运行时间都是在同一台计算机的 MatLab 平台上编写和统计的, 并且认为所有试验均没有任何关于 6 个外方位元素的先验信息。

分析表 4 两组数据可以发现, 欧拉角法(LS

和 TLS 解法)对影像的姿态非常敏感,单位四元数法能够处理绝大多数影像姿态场景,而本文算法则几乎对任意影像姿态均能正确解算。同时可以看出,欧拉角(LS 和 TLS 解法)和单位四元数这些迭代解法的精度很高,但是运行效率较低。而本文算法则兼顾精度与效率,不仅在精度上基本达到基于迭代的解算方法,而且在速度上比基于迭代的方法快接近 30 倍,这主要得益于本文方法无须迭代的特点,大大减少了计算的时间复杂度。

4.2 真实数据试验

为了验证本文算法对真实数据的处理能力,采用 3 张影像进行试验。第 1 张影像是采用 Canon EOS 450D 数码相机对三维室内精准控制场进行摄影获得,焦距  $f = 23.64 \text{ mm}$ ,摄影比例尺为 1 : 200,控制点个数为 10。后两组数据选用 SWDC 数字航空摄影仪在平顶山市拍摄的航空影像,该相机由 5 个子相机组成,一个中心相机和 4 个倾斜相机。其中,第 2 张影像是由中心相机拍摄所得,焦距  $f = 82.215 \text{ mm}$ ,像元大小  $0.0068 \text{ mm}$ ,摄影比例尺为 1 : 8000,相对航高

700 m,12 个控制点。第 3 张影像是由倾斜相机拍摄,焦距  $f = 99.86 \text{ mm}$ ,像元大小  $0.0068 \text{ mm}$ ,摄影比例尺为 1 : 8000,相对航高 700 m,15 个控制点。在平差计算过程中,认为没有任何关于影像外方位元素的先验信息,解算结果见表 5。

分析表 5 可得,当影像的 3 个姿态角都为小角时(如影像 1),3 种方法均能正确解算,本文方法与欧拉角(LS 和 TLS 解法)及单位四元数法结果一致,精度基本相同;当影像姿态角较大时(如影像 2),在没有任何先验信息的情况下,欧拉角法(LS 和 TLS 解法)出现错误收敛,解算失败,而本文方法与单位四元数法的解算结果则与商业软件 PATB 的区域网平差结果基本一致,且像点残差中误差均在 1 个像素以内;当影像姿态角非常大时(如影像 3),以 PATB 结果作为标准,只有本文算法能够正确解算,像点残差中误差为 0.889 像素,小于 1 个像素。

可见,本文算法具有很好的实用性,为无人机影像、倾斜相机影像等数据提供了一种可靠稳定的几何定位处理技术。

表 5 实际数据解算结果

Tab.5 Results for true data

影像	方法	$\Delta X_S/m$	$\Delta Y_S/m$	$\Delta Z_S/m$	$\Delta\varphi/(^\circ)$	$\Delta\omega/(^\circ)$	$\Delta\kappa/(^\circ)$	$m_0/\text{像素}$	迭代次数
1	本文	3.373	-0.141	0.930	-0.684	5.728	-2.350	0.180	1
	欧拉角	3.373	-0.141	0.930	-0.684	5.728	-2.350	0.180	5
	欧拉角 TLS	3.373	-0.141	0.930	-0.684	5.728	-2.350	0.179	5
	单位四元数	3.373	-0.141	0.930	-0.684	5.728	-2.350	0.180	5
	PATB	424 012.476	3 739 009.098	788.896	-3.210	-0.545	19.802		
2	本文	424 012.124	3 739 008.779	788.943	-3.183	-0.520	19.753	0.803	1
	欧拉角				错误收敛				26
	欧拉角 TLS				错误收敛				26
	单位四元数	424 012.600	3 739 009.100	788.888	-3.223	-0.531	19.752	0.708	7
	PATB	424 575.333	3 739 022.993	788.700	-46.113	-12.674	104.718		
3	本文	424 575.552	3 739 023.205	789.270	-46.139	-12.687	104.708	0.889	1
	欧拉角				错误收敛				16
	欧拉角 TLS				错误收敛				16
	单位四元数				错误收敛				16
	PATB								

注: PATB 表示商业软件 PATB 的区域网平差结果。

5 结 论

本文提出了一种以重心坐标为基准的非迭代空间后方交会方法。该方法借助规范重心坐标的坐标系参考无关性,将空间后方交会问题转换为绝对定向问题。并对算法的正确性、解算效率、解算精度、适用性进行验证,得到以下几点结论:

与欧拉角(LS 和 TLS 解法)和单位四元数等迭代解法相比,本文算法无须外方位元素初始值以及迭代求解,故具有较高的解算效率,并且避免了迭代过程中法方程病态的情形。同时,本文算法顾及了系数矩阵误差,采用总体最小二乘求解,并对结果进行了有效优化,取得了与迭代解法相当的精度。此外,本文算法几乎对任意影像姿态

均能正确解算, 拥有很好的实用性。

随着倾斜摄影测量的快速发展, 获取的影像姿态变化范围不断扩大, 此时, 传统方法将不再适用, 而本文算法可为此提供一种稳定可靠的处理技术。需要指出的是, 本文算法的抗粗差能力较弱, 粗差的自动剔除将是下一步的研究重点。

### 参考文献:

- [1] ZHANG Jianqing, PAN Li, WANG Shugen. Photogrammetry [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009. (张剑清, 潘励, 王树根. 摄影测量学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.)
- [2] WANG Zhizhuo. Principles of Photogrammetry[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1979. (王之卓. 摄影测量原理[M]. 北京: 测绘出版社, 1979.)
- [3] HARALICK B M, LEE C N, OTTENBERG K, et al. Review and Analysis of Solutions of the Three Point Perspective Pose Estimation Problem [J]. International Journal of Computer Vision, 1994, 13(3): 331-356.
- [4] FENG Wenhao. Close Range Photogrammetry[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002. (冯文瀚. 近景摄影测量[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.)
- [5] FU Zhongliang, ZHOU Fan, YU Zhiqiang. A Space Resection Synthesized the Multiple Features [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(8): 827-834. (付仲良, 周凡, 俞志强. 综合多种特征的后方交会法[J]. 测绘学报, 2014, 43(8): 827-834.)
- [6] JI Qiang, COSTA M S, HARALICK R M, et al. A Robust Linear Least-squares Estimation of Camera Exterior Orientation Using Multiple Geometric Features [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing, 2000, 55(2): 75-93.
- [7] JIANG Gangwu, JIANG Ting, WANG Yong, et al. Space Resection Independent of Initial Value Based on Unit Quaternions[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2007, 36(2): 169-175. (江刚武, 姜挺, 王勇, 等. 基于单位四元数的无初值依赖空间后方交会[J]. 测绘学报, 2007, 36(2): 169-175.)
- [8] GONG Hui, JIANG Ting, JIANG Gangwu, et al. A Globally Convergent Algorithm of Space Resection Based on Quaternion [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(5): 539-645. (龚辉, 姜挺, 江刚武, 等. 一种基于四元数的空间后方交会全局收敛算法[J]. 测绘学报, 2011, 40(5): 639-645.)
- [9] JI Ting, SHENG Qinghong, WANG Huinan, et al. Dual Quaternion of Space Resection with Single-image [J]. Journal of Image and Graphics, 2012, 17(4): 494-503. (姬亭, 盛庆红, 王惠南, 等. 对偶四元数单片空间后方交会算法[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(4): 494-503.)
- [10] PENATE-SANCHEZ A, ANDRADE-CETTO J, MORENO-NOGUER F. Exhaustive Linearization for Robust Camera Pose and Focal Length Estimation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(10): 2386-2400.
- [11] LEPETIT V, MORENO-NOGUER F, FUA P. EPnP: An Accurate  $O(n)$  Solution to the PnP Problem[J]. International Journal of Computer Vision, 2008, 81(2): 155-166.
- [12] GUAN Yunlan, CHENG Xiaojun, ZHOU Shijian, et al. A Solution to Space Resection Based on Unit Quaternion [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2008, 37(1): 30-35. (官云兰, 程效军, 周世健, 等. 基于单位四元数的空间后方交会解算[J]. 测绘学报, 2008, 37(1): 30-35.)
- [13] MORENO-NOGUER F, LEPETIT V, FUA P. Accurate Noniterative  $O(n)$  Solution to the PnP Problem [C] // Proceedings of the IEEE 11th International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro: IEEE, 2007: 1-8.
- [14] WACHSPRESSE L. A Rational Finite Element Basis[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [15] LOOP C T, DEROSE T D. A Multisided Generalization of Bézier Surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 1989, 8(3): 204-234.
- [16] ECKM, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes[C] // Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1995: 173-182.
- [17] FLOATER M S. Parametrization and Smooth Approximation of Surface Triangulations[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(3): 231-250.
- [18] CHEN Yi, LU Jue. Performing 3D Similarity Transformation by Robust Total Least Squares [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(5): 715-722. (陈义, 陆珏. 以三维坐标转换为例解算稳健总体最小二乘方法[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 715-722.)
- [19] GE Xuming, WU Jicang. Generalized Regularization to Ill-posed Total Least Squares Problem [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(3): 372-377. (葛旭明, 伍吉仓. 病态总体最小二乘问题的广义正则化[J]. 测绘学报, 2012, 41(3): 372-377.)
- [20] YUAN Qing, LOU Lizhi, CHEN Weixian. The Application of the Weighted Total Least-squares to Three Dimensional-Datum Transformation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(5): 115-119. (袁庆, 楼立志, 陈玮娴. 加权总体最小二乘在三维基准转换中的应用[J]. 测绘学报, 2011, 40(增刊): 115-119.)
- [21] UNGAR A A. Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry: A Comparative Introduction [M]. London: World Scientific, 2010.
- [22] XIE Wei. The Properties and Applications of Barycentric Coordinates in 3D Euclidean Space [J]. Mathematics Learning and Research: Teaching and Research Version, 2009, (1): 90, 92. (谢伟. 重心坐标在三维欧氏空间中的性质及其应用[J]. 数学学习与研究: 教研版, 2009, (1): 90, 92.)

(下转第 1013 页)

- 伟,王力宝,等.基于谱域-空域组合核函数的高光谱图像分类技术研究[J].信号处理,2011,27(5):648-652.)
- [16] CHEN Shanqing, HU Yihua, SHI Liang, et al. Classification of Hyperspectral Imagery Based on Ant Colony Compositely Optimizing SVM in Spatial and Spectral Features [J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2013, 33(8): 2192-2197. (陈善静,胡以华,石亮,等.空-谱二维蚁群组合优化 SVM 的高光谱图像分类[J].光谱学与光谱分析,2013,33(8):2192-2197.)
- [17] POGGI G, SCARPA G, ZERUBIA J B. Supervised Segmentation of Remote Sensing Images Based on a Tree-structure MRF Model [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2005, 43(8): 1901-1911.
- [18] JACKSON Q, LANDGREBE D A. Adaptive Bayesian Contextual Classification Based on Markov Random Fields [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(11): 2454-2463.
- [19] FAUVEL M, BENEDIKTSSON J A, CHANUSSOT J, et al. Spectral and Spatial Classification of Hyperspectral Data Using SVMs and Morphological Profiles [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2008, 46(11): 3804-3814.
- [20] CRESPO J, SERRA J, SCHAFFER R W. Theoretical Aspects of Morphological Filters by Reconstruction [J], Signal Processing, 1995, 47(2): 201-225.
- [21] FAUVEL M, TARABALKA Y, BENEDIKTSSON J A, et al. Advances in Spectral-spatial Classification of Hyperspectral Images [J]. Proceedings of the IEEE, 2013, 101(3): 652-675.
- [22] CHANG C C, LIN C J. LIBSVM: A Library for Support Vector Machines [J]. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST), 2011, 2(3): 27.

(责任编辑:张艳玲)

收稿日期:2014-07-21

修回日期:2015-06-08

第一作者简介:王俊淑(1985—),女,博士生,助理研究员,研究方向为高光谱遥感影像智能信息提取。

First author: WANG Junshu(1985—), female, PhD candidate, research assistant, majors in intelligent information extraction of hyperspectral remote sensing image.

E-mail: jlsdwjs@126.com

通信作者:江南

Corresponding author: JIANG Nan

E-mail: njiang@nju.edu.cn

(上接第994页)

- [23] JOSEPHSON K, BYROD M. Pose Estimation with Radial Distortion and Unknown Focal Length [C] // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, FL: IEEE, 2009: 2419-2426.
- [24] HARTLEY R I, ZISSERMAN A. Multiple View Geometry in Computer Vision [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [25] CHEN Yi, LU Jue, ZHENG Bo. Application of Total Least Squares to Space Resection [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(12): 1271-1274. (陈义,陆珏,郑波.总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J].武汉大学学报:信息科学版,2008,33(12):1271-1274.)
- [26] SCHUT G H. On Exact Linear Equations for the Computation of the Rotational Elements of Absolute Orientation [J]. Photogrammetria, 1960-1961, 17: 34-37.
- [27] HORN B K P, HILDEN H M, NEGAHDARIPOUR S. Closed-form Solution of Absolute Orientation Using Orthonormal Matrices [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1988, 5(7): 1127-1135.
- [28] LI Deren, YUAN Xiuxiao. Error Processing and Reliability Theory [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002. (李德仁,袁修孝.误差处理与可靠性理论 [M].武汉:武汉大学出版社,2002.)

(责任编辑:丛树平)

收稿日期:2014-09-09

修回日期:2015-01-06

第一作者简介:李加元(1989—),男,硕士,研究方向为摄影测量、图像处理与计算机视觉。

First author: LI Jiayuan(1989—), male, master, majors in photogrammetry, image processing and computer vision.

E-mail: 397744657@qq.com

通信作者:胡庆武

Corresponding author: HU Qingwu

E-mail: huqw@whu.edu.cn